

令和7年度 卒業論文

平行平板クエット流れ下の希薄粒子懸濁液の粘度の
有限サイズ効果の評価

名古屋大学 工学部 物理工学科
増淵研究室

082120343 中宮真聡

要旨

本研究では、B型粘度計のような同軸二重円筒の回転粘度計での希薄粒子懸濁液の粘度測定において、有限の流路幅による効果がどのような影響を与えるか調べることを目的として、直接数値計算を用いて平行平板クエット流れ下における希薄粒子懸濁液の粘度を計算した。回転粘度計での粘度測定を行った先行研究では、大きい固体粒子を含む液体の粘度がEinsteinの理論とずれている。有限の流路幅による効果の解明は、曲率を有する流路における粘度評価の基礎となると期待される。パラメータとして流路幅と粒子半径の比 H/R を振り、各 H/R において見かけ比粘度の粒子体積分率依存性を調べた。各 H/R において、見かけ比粘度は粒子体積分率に対して線形になっており、 H/R が十分に大きければEinsteinの理論と一致した。一方で、 H/R が小さくなるほど理論値に比べて粘度が増加する傾向が見られた。すなわち、実効粘度 η_{app} に対して溶媒粘度を η_d 、粒子体積分率を ϕ とするとき、以下の式で得られる比例定数 C について、 H/R が十分に大きければ理論値である $C = 5/2$ にほぼ一致し、 H/R が小さくなるほど比例定数 C は大きくなった。

$$\frac{\eta_{\text{app}}}{\eta_d} - 1 = C\phi \quad (1)$$

以上の結果より、希薄粒子懸濁液の粘度測定において有限の流路幅による効果は粘度を増加させる方向にのみ寄与すると結論づけた。また、先行研究において理論とずれた要因として内円筒半径と粒子半径の比に着目して考察した。

目次

要旨	1
第1章 緒言	3
第2章 手法	5
2.1 支配方程式	5
2.2 境界条件	5
2.3 パラメータ	6
2.4 計算環境と離散化方法	6
2.5 計算格子	6
2.6 圧力速度連成	6
第3章 結果および考察	7
3.1 数値シミュレーションの妥当性検証	7
3.2 定常状態の評価とレイノルズ数との関係	7
3.3 流路幅と粒子半径の関係	9
3.4 曲率効果を有する系	10
第4章 結言	11
参考文献	13

第1章

緒言

身の回りの食品や化粧品には、固体粒子を含む流体が多く存在している [1, 2]。例えば、ココアや顔料インクが挙げられる。中には、カレーのような大きな固体を含む流体も存在する。それらは粘度によって食感や使用感などの特性が変化することが知られている [3, 4]。

しかし、粒子の形状や体積分率、粒子間相互作用などにより粘度は複雑に変化する [5, 6]。したがって、このような粒子懸濁液の粘度は、図 1.1 に示す B 型粘度計として知られる同軸二重円筒型回転粘度計を用いて、見かけ粘度として測定される [7]。

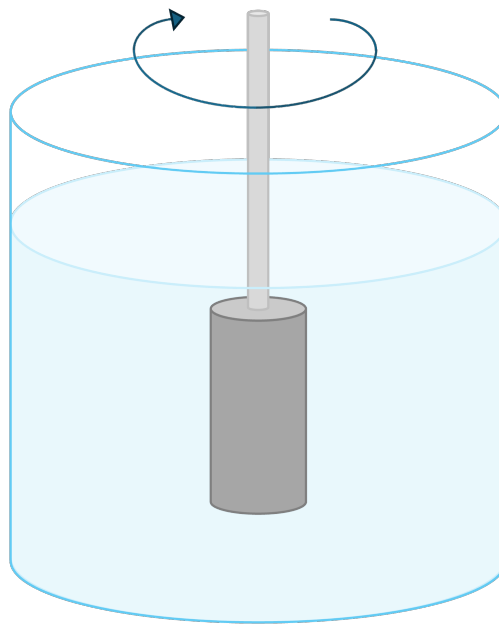


図 1.1 B 型粘度計の模式図

剛体球状粒子の場合、低濃度においては、懸濁液の粘度は Einstein の式に従う [8, 9]。

$$\eta_{sp} = C\phi, C = 5/2 \quad (1.1)$$

ここで、 η_{sp} は見かけ比粘度、 ϕ は体積分率である。この理論式は、無限に広い空間における一様な単純せん断流れを考え、粒子間相互作用を無視するという仮定に基づき導出されている。そのような条件に近い微小な固体粒子を微量含んだ液体では $C = 5/2$ の理論式とよく合う [10, 11]。一方、大きい固体粒子を含んだ液体では $C = 2.7$ [12]、 $C = 0.65, 0.8, 1.2$ [13] と、理論との差異が生じる。その要因については、有限サイズ効果として有限の流路幅による効果と曲率による効果が考えられる。しかし、それぞれがどの

ように影響を与えているかは明らかになっていない。

そこで本研究では、流路幅に対して大きい固体粒子を含んだ液体の粘度が、どの要因によって Einstein の理論からどのくらいずれているのかシミュレーションで明らかにすることを目的とした。平行平板のクエット流れ下による希薄粒子懸濁液を考え、OpenFOAM を用いた直接数値計算で解析し、有限の流路幅による効果とレイノルズ数の影響を評価した。結果を踏まえて、流路の曲率の影響も考察した。

第 2 章

手法

2.1 支配方程式

非圧縮性流体の運動において、(2.1) のナビエ・ストークス方程式によって運動量保存が、(2.2) の連続の式によって質量保存が表現される。

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (2.2)$$

ここで、 \mathbf{u} は流速、 ρ は密度、 p は圧力、 ν は動粘度係数である。

2.2 境界条件

図 2.1 のように流路の中心に半径 R の球を置いた系を作成した。境界条件として、上壁に $+U/2$ 、下壁に $-U/2$ を与え、どちらも滑りなしと設定した。球表面にも滑りなし条件を課したが、粒子の運動方程式は解かず境界条件として角速度 $\dot{\gamma}/2$ を与えた。 x, y 方向については周期境界条件を用いた。 x 方向のサイズは $L_x/R = 10$ とした。

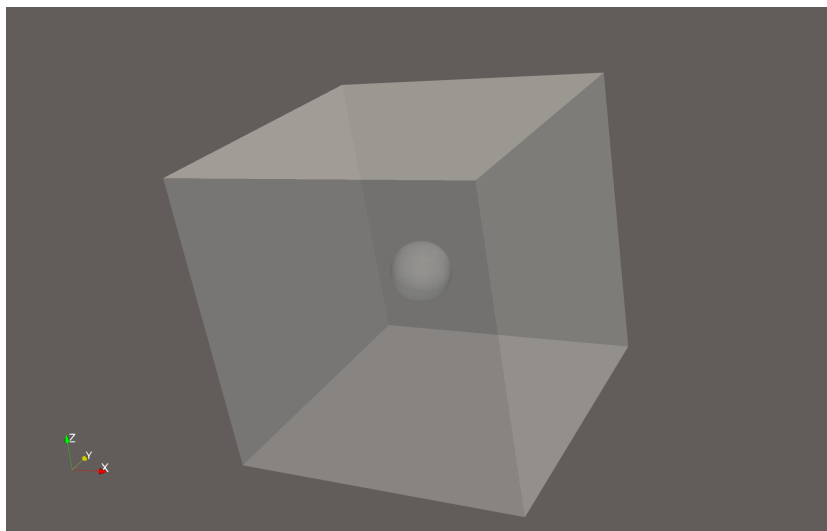


図 2.1 $L_y/R = H/R = 10$ のスナップショット

2.3 パラメータ

2.2 節の条件下で、 $L_y/R = H/R = 10$ 、レイノルズ数 $Re = HU/\nu$ を $Re = 2, 5, 10, 20$ に設定した。その後 $Re = 10$ 下で、粒子半径 R に対する流路幅 H を $H/R = 4, 6.4, 8, 10, 25.6$ に設定し、各流路幅と粒子半径の比 H/R において、 y 方向のサイズ L_y を変えて体積分率 $\phi = (4R^3\pi/3)/L_xL_yH$ を変化させた。

2.4 計算環境と離散化方法

計算は OpenFOAM version 8 を使用した。また、本研究では単相・非圧縮性流れの時間発展解析を対象とするため、OpenFOAM 標準ソルバーの `pimpleFoam` を採用した [14]。

OpenFOAM では空間についての離散化に有限体積法が用いられている。これは体積を考慮しながら離散化を行う方法であり、質量保存に優れるが、高精度化に弱いといった特徴がある。時間についての離散化は、クランクニコルソン法を用いた [15]。クランクニコルソン法は時間 2 次精度の半陰解法であるが、本計算では係数 0.9 を用いて後退差分寄りにし、時間発展計算における数値振動を抑えつつ安定性を確保した。解析のタイムステップは、最大クーラン数 $U\Delta t/\Delta x = 0.3$ の条件で自動調節させた。

2.5 計算格子

`blockMesh` で計算領域を格子幅 $\Delta x/R = 0.4$ が基礎メッシュとなるように分割し、`snappyHexMesh` で球の切り出しおよび、球近傍のさらなる分割と境界への吸着を行った。表 2.1 に計算領域と格子点数の対応の一部を示す。 H および L_y の分割数の偶奇によって、`snappyHexMesh` による球近傍の分割がわずかに異なることに注意が必要である。

表 2.1 基礎メッシュと球の切り抜きおよび近傍の分割後の格子点数

Base mesh ($N_x \times N_y \times N_z$)	Base cells	Cells after cut/refine
$25 \times 25 \times 25$	15625	23504
$25 \times 100 \times 25$	62500	70631
$25 \times 60 \times 10$	15000	22704

2.6 圧力速度連成

本研究では圧力と速度の連成を解くために、PIMPLE 法を用いた。離散化された方程式では、解かれる変数ごとに、適切な線形ソルバーを定義している。圧力のソルバーとして、前処理 (preconditioner) に GAMG を用いた PCG を使用した。速度のソルバーとして、GaussSeidel を用いた `smoothSolver` を使用した。

第3章

結果および考察

3.1 数値シミュレーションの妥当性検証

ここでは、本研究で行った数値シミュレーションの妥当性を示す。まず、粒子が存在しないニュートン流体のみの系に対して、設定した粘度 η_{in} に対する算出粘度 η_{out} の相対誤差を調べた。 η_{out} は、壁に平行な方向にかかる力 F から $\eta_{out} = F/(L_x L_y \dot{\gamma})$ で計算した。以下の結果より、数値誤差は $O(10^{-8})$ であり、以降の計算において考慮する必要がないほど十分に小さい。

$$(\eta_{in} - \eta_{out})/\eta_{in} \approx 7.24 \times 10^{-6}\%$$

次に、粒子の運動を解かずに境界条件で代用したことによる影響を評価するために、 $Re = 10$ 、 $L_x/R = L_y/R = H/R = 10$ の系で粒子表面にかかる y 成分のトルク T_y を代表スケール $T_y^* = 8\pi\eta_d R^3 \dot{\gamma}$ で無次元化して調べた。結果は $O(10^{-4})$ であり、理論値 $T_y/T_y^* = 0$ に十分近い。

$$T_y/T_y^* \approx 2.95 \times 10^{-4}$$

3.2 定常状態の評価とレイノルズ数との関係

ここでは、系が定常状態に到達するのに必要な時間を評価する。図 3.1 に見かけ比粘度の時間変化 $\eta_{sp}^+ = \eta_{app}/\eta_d - 1$ を示す。ここで、 η_d は溶媒の粘度、 η_{app} は粒子を含む流体の実効粘度である。横軸は無次元化された時間 $t\nu/H^2$ 、縦軸は見かけ比粘度 η_{sp}^+ である。図 3.1 から、全てのレイノルズ数 Re で Einstein の理論値に漸近している。また、レイノルズ数 Re によって収束する時間は異なり、 Re が小さくなるほど長くなっていることが分かる。 $Re = 10$ のグラフより、3.3 節の計算では $t\nu/H^2 > 2$ を定常状態のデータとして用いて解析を行う。

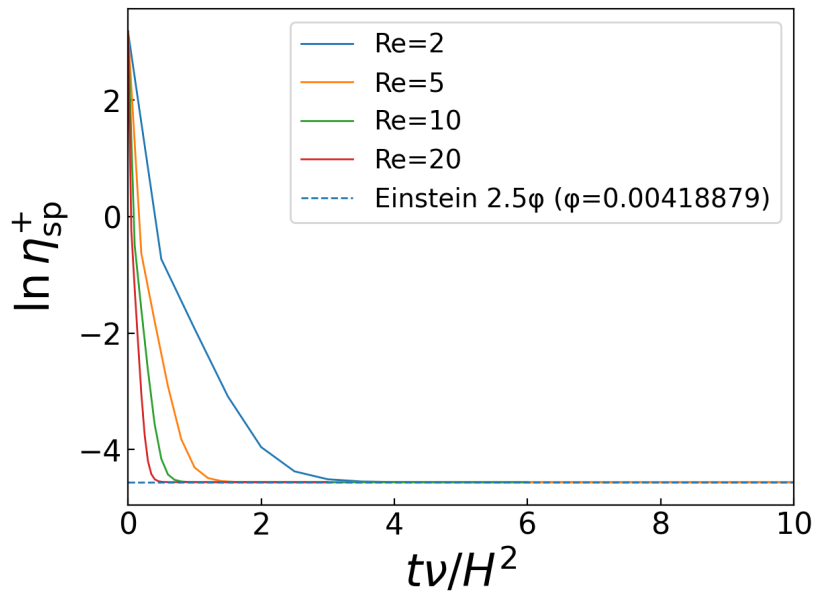


図 3.1 異なるレイノルズ数における見かけ比粘度の時間変化

次に、レイノルズ数による効果が有限の流路幅による効果に対して無視できるほど小さいことを確認するため、 $Re \rightarrow 0$ での比粘度に十分収束しているか評価する。図 3.2 に定常状態における見かけ比粘度 η_{sp} の Einstein の理論値 η_{theo} に対する相対誤差 $(\eta_{sp} - \eta_{theo})/\eta_{theo}$ とレイノルズ数 Re の関係を示す。見かけ比粘度の計算には、十分収束した範囲を平均したものをを用いた。図 3.2 から、レイノルズ数が 0 に近づくにつれ相対誤差は小さくなるのが分かる。しかし、今回計算したレイノルズ数の範囲では、変化量が $O(10^{-3})$ 程度であり、十分に収束していると考えられる。3.3 節の計算では物性を変化させないためにレイノルズ数 $Re = 10$ で固定した。

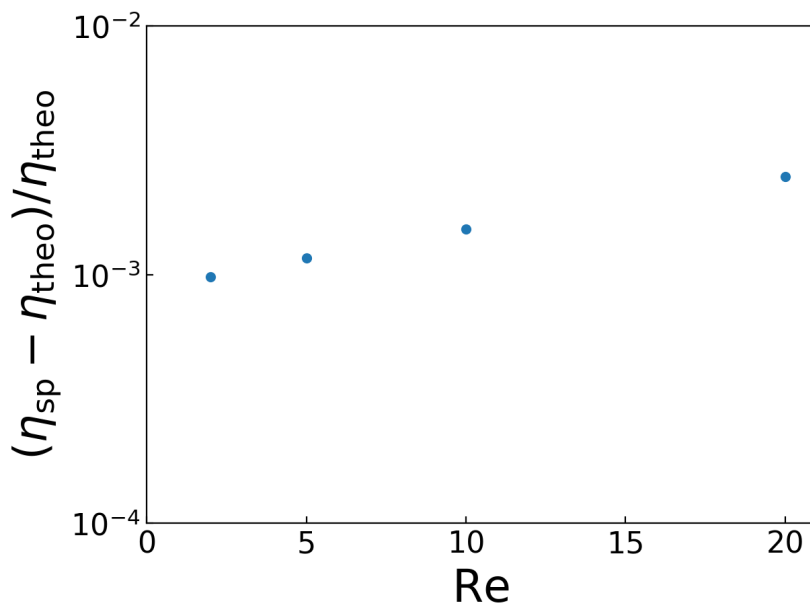


図 3.2 見かけ比粘度の Einstein 理論に対する相対誤差のレイノルズ数依存性

3.3 流路幅と粒子半径の関係

ここでは、粒子が流路から受ける有限サイズ効果の影響によって、見かけ粘度がどのように変動するかを評価する。図 3.3 に、各流路幅と粒子半径の比 H/R ごとの見かけ比粘度 η_{sp} の体積分率 ϕ 依存性を示す。各 H/R において η_{sp} は ϕ に対して線形になっており、 H/R が十分大きければ Einstein の理論に整合する。一方、 H/R が小さくなるほど理論直線より上方にずれる。

ここで、各 H/R において、式 (3.1) でフィッティングを行った。 C は比例定数である。この比例定数 C と H/R の関係を調べることで、有限の流路幅による効果が見かけ粘度に与える影響を評価した。

$$\eta_{sp} = C\phi \quad (3.1)$$

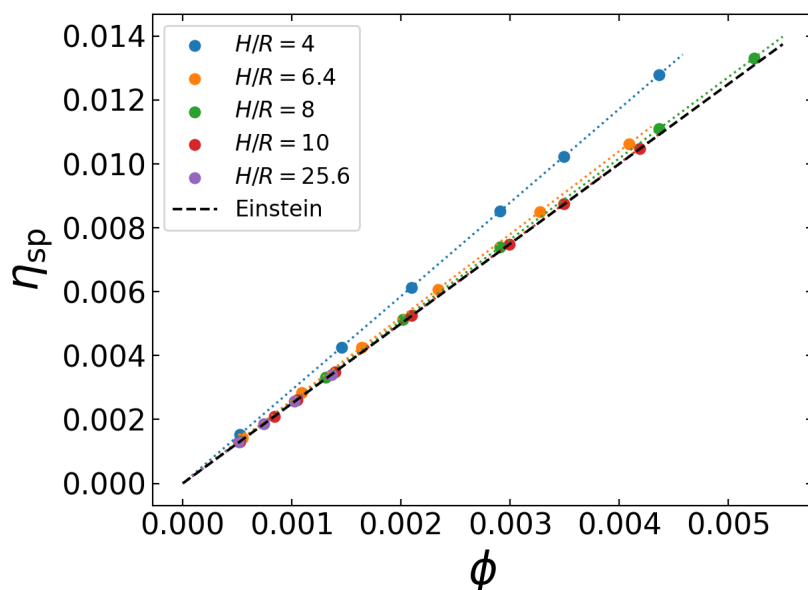


図 3.3 見かけ比粘度の体積分率依存性

図 3.4 に、比例定数 C と流路幅と粒子半径の比 H/R の関係を示す。縦軸は比例定数 C 、横軸は流路幅と粒子半径の比 H/R である。図 3.4 より、 $H/R \geq 10$ では、理論値である $C = 5/2$ にほぼ一致している。また、 H/R が小さくなるほど比例定数 C は大きくなっていき、 $H/R = 4$ では $C \approx 2.92$ まで増加した。これは、粒子と壁の間の局所的なせん断速度が増加したためであると考えられる。

2枚の壁による1次補正まで拡張した Oseen の理論 [16] と比較する。Oseen の理論における比例定数 C も H/R に対して同様に変化することがわかる。しかし、 $H/R \geq 6.4$ ではシミュレーション結果が理論より小さく、 $H/R = 4$ では理論より大きくなっている。 H/R が大きい範囲で理論が上回ったのは、理論が粒子の一様分布を仮定しているのに対して、今回のシミュレーションでは粒子を中央に固定しているため、粒子による粘度増加が小さくなったことが考えられる。また、 H/R が小さい範囲で理論が下回ったのは、理論では反射法を粒子と壁でそれぞれ1回ずつしか適用していないため、壁との近接による大きな粘度増加を上手く近似できていないことが考えられる。

以上の結果より、有限の流路幅による効果は Einstein の粘度式に比べて粘度を増加させる方向に寄与するといえる。

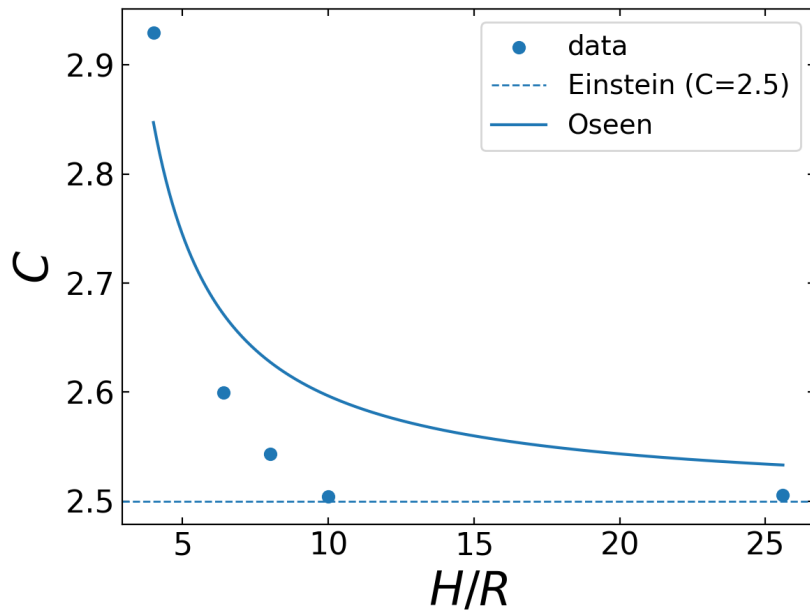


図 3.4 比例定数 C の流路幅と粒子半径の比 H/R 依存性 [16]

3.4 曲率効果を有する系

B 型粘度計の測定において、Einstein の理論から外れる要因として有限の流路幅による効果と曲率による効果を挙げた。ここで、有限の流路幅による効果は流路幅 H と粒子半径 R の比 H/R 、曲率による効果は内円筒半径 R_1 と粒子半径 R の比 R/R_1 で表される。本研究では、有限の流路幅による効果は Einstein の粘度式に比べて粘度増加にしか寄与しないことが分かったため、曲率による効果が重要であると考えられる。

粒子懸濁液の粘度が理論とおおよそ一致する先行研究の実験では、内円筒半径 R_1 と粒子半径 R の比が $R/R_1 \approx 0.010, 0.0056, 0.00016$ である [10, 11]。一方、粘度が理論より減少する先行研究の実験では $R/R_1 = 0.5, 0.67, 0.789$ である [13] という違いが見られた。理論の導出においては一様な単純せん断流を仮定している。これに対し、 R/R_1 が小さいときには粒子近傍の流れは一様せん断流とみなすことが比較的妥当である一方、 R/R_1 が大きいときには一様せん断流とみなすことが難しくなる。よって曲率効果を有する系の粘度では、内円筒半径に対する粒子半径の大きさが関係していると示唆される。

第4章

結言

本研究では、B型粘度計のような回転粘度計での希薄粒子懸濁液の粘度測定において、有限の流路幅による効果がどのような影響を与えるか調べるため、直接数値計算を用いて平行平板クエット流れ下における希薄粒子懸濁液の粘度を計算した。パラメータとして流路幅 H と粒子半径 R の比を $H/R = 4, 6.4, 8, 10, 25.6$ と振り、各 H/R において見かけ比粘度の体積分率依存性を調べた。各流路幅と粒子半径の比 H/R において、見かけ比粘度は体積分率に対して線形になっており、 H/R が十分に大きければ Einstein の理論と一致した。逆に H/R が小さくなればなるほど理論値に比べて粘度が増加する傾向が見られた。実効粘度 η_{app} に対して溶媒粘度を η_d 、粒子体積分率を ϕ とするとき、以下の式で得られる比例定数 C について、流路幅と粒子半径の比 H/R 依存性を調べた。

$$\frac{\eta_{\text{app}}}{\eta_d} - 1 = C\phi \quad (4.1)$$

$H/R \geq 10$ では、理論値である $C = 5/2$ にほぼ一致した。 H/R が小さくなるほど比例定数 C は大きくなっていき、 $H/R = 4$ では $C \approx 2.92$ まで増加した。以上より、希薄粒子懸濁液の粘度測定において有限の流路幅による効果は粘度を増加させる方向にのみ寄与すると結論づけた。また、先行研究において理論とずれた要因として内円筒半径と粒子半径の比に着目して考察した。

謝辞

本研究を進めるにあたり、多くの方々にご助力を賜りました。ここに深く感謝申し上げます。増渕雄一先生には、研究内容やプレゼンテーションに関するご助言に加え、卒業論文の添削を丁寧に行ってくださいました。畝山多加志先生には、ゼミのたびに貴重なコメントをいただき、大変参考にさせていただきました。石田崇人先生には、日頃から学生に近い立場で気にかけていただき、輪講においても大変お世話になりました。小井手祐介先生には、研究方針の相談や進捗状況に応じた目標設定、さらには卒業論文発表の内容に至るまで、とりわけ多くのご指導をいただきました。一方的に指導を受けるというよりも、自身の悩みや課題を明確にした上で解決策をご提示くださるご指導は、何よりも自身の成長につながったと感じております。心より感謝申し上げます。また、先輩の皆様にも、多くのご指導とご助言をいただきました。研究面にとどまらず、研究室生活においても楽しい時間を共有していただき、心より感謝しております。同期の皆様には、同じ環境で努力する姿に多くの刺激を受け、私自身も頑張ろうという励みをいただきました。また、研究以外でもともに遊んだり食事をしたりと、楽しい時間を過ごすことができました。

皆様に、この1年間支えていただいたことに深く感謝申し上げます。

参考文献

- [1] Katlijn R.N. Moelants, Ruth Cardinaels, Sandy Van Buggenhout, Ann M. Van Loey, Paula Moldenaers, and Marc E. Hendrickx. A review on the relationships between processing, food structure, and rheological properties of plant-tissue-based food suspensions. *Comprehensive Reviews in Food Science and Food Safety*, Vol. 13, No. 3, pp. 241–260, 2014.
- [2] Samantha L. Schneider and Henry W. Lim. A review of inorganic uv filters zinc oxide and titanium dioxide. *Photodermatology, Photoimmunology & Photomedicine*, Vol. 35, No. 6, pp. 442–446, 2019.
- [3] Jean-Xavier Guinard and Rossella Mazzucchelli. The sensory perception of texture and mouth-feel. *Trends in Food Science & Technology*, Vol. 7, No. 7, pp. 213–219, July 1996.
- [4] Giovanni Tafuro, Alessia Costantini, and Alessandra Semenzato. Rheology, texture analysis and tribology for sensory prediction and sustainable cosmetic design. *Cosmetics*, Vol. 13, No. 1, p. 25, 2026.
- [5] S. Mueller, E. W. Llewellyn, and H. M. Mader. The effect of particle shape on suspension viscosity and implications for magmatic flows. *Geophysical Research Letters*, Vol. 38, No. 13, 2011.
- [6] Jonathan J. Stickel and Robert L. Powell. Fluid mechanics and rheology of dense suspensions. *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol. 37, No. 1, pp. 129–149, 2005.
- [7] C. W. I. Haminiuk, M. R. Sierakowski, J. R. M. B. Vidal, and M. L. Masson. Influence of temperature on the rheological behavior of whole araçá pulp (*Psidium cattleianum* sabine). *LWT - Food Science and Technology*, Vol. 39, No. 4, pp. 427–431, 2006.
- [8] A. Einstein. Berichtigung zu meiner Arbeit: Eine neue Bestimmung der Moleküldimensionen. *Annalen der Physik*, Vol. 339, No. 3, pp. 591–592, January 1911.
- [9] A. Einstein. Eine neue bestimmung der moleküldimensionen [adp 19, 289 (1906)]. *Annalen der Physik*, Vol. 517, No. S1, pp. 229–247, 2005.
- [10] F. Eirich, M. Bunzl, and H. Margaretha. Untersuchungen über die viskosität von suspensionen und lösungen. 4. über die viskosität von kugelsuspensionen. *Kolloid-Zeitschrift*, Vol. 74, pp. 276–285, March 1936. Received: 10 January 1936; Issue date: March 1936.
- [11] Vladimir Vand. Viscosity of solutions and suspensions. ii. experimental determination of the viscosity–concentration function of spherical suspensions. *Journal of Physical and Colloid Chemistry*, Vol. 52, No. 2, pp. 300–314, February 1948. Received: 24 June 1947.
- [12] G. Broughton and C. S. Windebank. Agglomeration and viscosity in dilute suspensions. *Industrial & Engineering Chemistry*, Vol. 30, No. 4, pp. 407–409, April 1938.

-
- [13] 琢也庄田. 流路幅に近い大きさの粒子が分散した液体の共軸二重円筒型粘度計の見かけ比粘度. 修士論文, 名古屋大学, 2025. Master's thesis (in Japanese).
- [14] H. G. Weller, G. Tabor, H. Jasak, and C. Fureby. A tensorial approach to computational continuum mechanics using object-oriented techniques. *Computers in Physics*, Vol. 12, No. 6, pp. 620–631, 1998.
- [15] J. Crank and P. Nicolson. A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat-conduction type. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, Vol. 43, pp. 50–67, 1947.
- [16] John Happel and Howard Brenner. *Low Reynolds Number Hydrodynamics*, Vol. 1 of *Mechanics of Fluids and Transport Processes*. Martinus Nijhoff Publishers, The Hague, 1983.